

Lurie 系统稳定性的一种判定方法及其应用

兰冬生, 彭世国

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090)

摘要: 在 Lurie 系统 b, c 间构造矩阵 B , 利用 Lyapunov 方法结合亚负定理论, 得出系统稳定性判据, 给出实例. 特点在于不用含积分项的 V 函数就可以全面判定系统稳定性, 结果更适合程序处理.

关键词: 一般 Lurie 控制系统; 第一标准型; 绝对稳定; 亚负定

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2008)03-0043-04

1 问题的提出

$$\text{Lurie 控制系统} \begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + bf(\sigma) \\ \sigma = c^T X = \sum_{i=1}^n c_i x_i \end{cases} \quad (1)$$

其中, $X, c, b \in R^n, A \in R^{n \times n}, f(0) = 0, 0 < \sigma f(\sigma) \leq k\sigma^2, (0 < k < +\infty)$.

由文献 [1] 给出了全面的概括及论述, 其后文献 [2-5] 采用不同方法找出其稳定的充要和充分条件. 本文考虑在 c, b 间构造正定且对称矩阵 $B_{n \times n}$, 使得 $Bb = \rho c$ (其中 $\rho = 1$ 或 -1). 依稳定性把 A, b, c 元素关联起来, 写出矩阵 B 的具体形式, 找出部分规律, 得出系统绝对稳定的充分和充要条件以及矩阵 B 的构造方法, 并给出了例子.

2 引理

引理 1^[1] 下列条件都是文献 [1] 的 (2.1) 式绝对稳定的必要条件,

1) $c^T b \leq 0$

2) 若 A 为 Hurwitz 矩阵, 则 $c^T A^{-1} b \geq 0$

定义 1 n 阶实矩阵 A 称为亚 (半) 负定矩阵,

如果有 $R(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ (半) 负定.

引理 2^[6] n 阶实矩阵 A 亚负定 (亚半负定).
 $\Leftrightarrow x^T Ax < 0 \quad \forall x \neq 0 (x^T Ax \leq 0 \quad \forall x \neq 0)$.

3 主要结果

定理 1 存在正定且对称矩阵 $B_{n \times n}$, 对任意给定的 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T, (b^T c \neq 0)$, 有 $Bb = \rho c (\rho = 1 \text{ 或 } -1)$.

证明 记 $B = P^T P, P = (p_{ij})_{n \times n}$,

$$Bb = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i1} b_{ij} b_j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ik} b_{ij} b_j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{in} b_{ij} b_j \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

由 $\rho_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ik} b_{ij} b_j$, 现分两种情况讨论 b_j 的存在性.

1) 当 $b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$,

$$\text{记 } P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & b_{n-1, n-1} & b_{n-1, n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}, b_j \neq 0$$

$j = i$ 或 $j = i + 1$,

可得

$$\begin{cases} \rho c_1 = b_{11}^2 b_1 + b_{11} b_{12} b_2, \\ \rho c_2 = b_{11} b_{12} b_1 + (b_{12}^2 + b_{22}^2) b_2 + b_{22} b_{23} b_3, \\ \dots \dots \\ \rho c_n = b_{n-1, n-1} b_{n-1, n} b_{n-1} + (b_{nn}^2 + b_{n-1, n}^2) b_n. \end{cases} \quad (2)$$

先阐述一个原理: 若 $\sum_{j=1}^k b_j c_j > 0 (k \leq n)$, 则存在 $b_j \neq 0 (j = 1 \text{ 或 } j = i + 1)$, 使得 $p^T p d = c (p \in R^{k \times k}, b, c \in R^k)$. 在式 (2) 中取前 k 项等式, 记 $\rho = 1$ 及 $b_{k+1} = 0$ 观察到

$$\rho c_1 b_1 + \rho c_2 b_2 + \dots + \rho c_k b_k = (b_{11} b_1 + b_{12} b_2)^2 + (b_{22} b_2 + b_{23} b_3)^2 + \dots + (b_{kk} b_k)^2 = \sum_{j=1}^k b_j c_j$$

可记 $b_{ii}b_i + b_{i+1}b_{i+1} = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_0 = 0$ $i < k$), $b_{kk}b_k = \varepsilon_k$,

$$\text{有 } b_{i+1} = \frac{\sum_{j=1}^{j=i} (c_j b_j - \varepsilon_{j-1}^2) - b_{ii}^2 b_i^2}{b_{ii} b_i b_{i+1}}, \quad \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2 = \sum_{j=1}^{j=k} b_j c_j$$

$$\text{可得出 } b_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^{j=i} (c_j b_j - \varepsilon_{j-1}^2)}{\varepsilon_i b_i}, \quad b_{i+1} = \frac{\varepsilon_i^2 - \sum_{j=1}^{j=i} (c_j b_j - \varepsilon_{j-1}^2)}{\varepsilon_i b_{i+1}},$$

b_{ii} 、 b_{i+1} 即为上述方程(2)前 k 项等式当 $k_{k+1} = 0$ 时

$$\text{的解 } (i < k, b_{kk} = \frac{\varepsilon_k}{b_k}), \text{验证时令 } \frac{\sum_{j=1}^{j=k} b_j c_j}{k} = \varepsilon_i^2 \text{ 即可.}$$

这一原理可称为“正可断”原理, 只要有一段

$\rho \sum_{i=1}^m b_i c_i > 0$ 在整个 b_{i+1} ($i = 1, \dots, n$) 中 $b_{n,m+1}$ 就

可以取 0 相对预先规定的 $b_j \neq 0$ P 中第二条斜线就可以断开, 这个原理给出了 1) 的证明: 若后 $n-k$

项 $\sum_{i=k+1}^n b_i c_i > 0$ 同理可得后 $n-k$ 项方程解. 若后 $n-k$

k 项 $\sum_{i=k+1}^n b_i c_i < 0$ 则由 $\rho \sum_{i=1}^n b_i c_i > 0$ 仍可得出全部解.

可以看出, 在 1) 中, 若 $\rho b_i c_i > 0$ 则 B 除主对角线元素外全为 0

2) 当 $b_l \sim b_m = 0$ ($1 \leq l \leq m \leq n$),

若 $b_l \neq 0$ 记

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & b_{l-2, l-2} & b_{l-2, l-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & b_{l-1, l-1} & b_{l-1, l} & b_{l-1, l+1} & \dots & b_{l-1, m+1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & b_{ll} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & b_{l+1, l+1} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m+1, m+1} & b_{m+1, m+2} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m+2, m+2} & \ddots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

由 $Bb = \rho c$ 得方程组

$$\begin{cases} \dots, \\ \rho c_{l-1} = b_{l-2, l-2} b_{l-2, l-1} b_{l-2} + (b_{l-2, l-1}^2 + b_{l-1, l-1}^2) b_{l-1} + b_{l-1, l-1} b_{l-1, m+1} b_{m+1}, \\ \rho c_l = b_{l-1, l-1} b_{l-1, l} b_{l-1} + b_{l-1, l} b_{l-1, m+1} b_{m+1}, \\ \dots, \\ \rho c_i = b_{l-1, l-1} b_{l-1, i} b_{l-1} + b_{l-1, i} b_{l-1, m+1} b_{m+1}, \\ \dots, \\ \rho c_m = b_{l-1, l-1} b_{l-1, m} b_{l-1} + b_{l-1, m} b_{l-1, m+1} b_{m+1}, \\ \rho c_{m+1} = b_{l-1, l-1} b_{l-1, m+1} b_{l-1} + (b_{l-1, m+1}^2 + b_{m+1, m+1}^2) b_{m+1} + b_{m+1, m+1} b_{m+1, m+2} b_{m+2}, \\ \dots, \end{cases}$$

由式(3)知 $l \sim m$ 项相对独立, 在 $b_{l-1, m+1}$ 和 $b_{l-1, l-1}$ 取定的情况下, 可直接得 $b_{l-1, i}$, 讨论显然包括 $b_n = 0$

若 $b_l \sim b_h = 0$ 可记

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{hh} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_{h+1, 1} & b_{h+1, 2} & \dots & b_{h+1, h} & b_{h+1, h+1} & b_{h+1, h+2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{h+2, h+2} & b_{h+2, h+3} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{h+3, h+3} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

与式 (3) 同理, 知前 h 个等式相对独立, 在 $b_{h+1+h+1}$ 、 $b_{h+1+n+2}$ 取定的情况下, 可直接得 b_{h+1+i} $i \leq h$

若仅 $b_k \neq 0$ 此时可令 P 中 b_{ki} 及 $b_{ii} \neq 0$ 调节 ρ 正负即可.

综上所述, 若 $b_i = 0$ 则 i 式 ($\rho c_i = b_{l-1+l-1} b_{l-1+i} \times b_{l-1} + b_{l-1+i} b_{l-1+m+1} b_{n+1}$ 或 $\rho c_i = b_{h+1+h+1} b_{h+1+i} b_{h+1} + b_{h+1+i} b_{h+1+h+2} b_{h+2}$) 相对独立, 因此在构造 B 时, 先把 $b_i \neq 0$ 对应的 b_{ii} 、 b_{i+i+1} 结合到一起, 在 $b_i \neq 0$ 的情况下根据 1) 算出 b_{ii} 、 b_{i+i+1} , 再根据 $b_i = 0$ 的情况得出其余元素, 这样就可以求出矩阵 P 的具体形式. 在这里要指出, 本文中所有 $c^T b \neq 0$ 证毕.

由以上原理可以看出, ϵ_i 选取的多样性决定了 B 的存在且不惟一性, 而在实际中可根据 b 、 c 的情况简化的 B 形式, 以带来更多方便. 下面由定理 1 得出一种一般 Lurie 控制系统稳定性判定方法.

定理 2 存在正定对称矩阵 $B_{n \times n}$, 满足 $Bb = \rho c$
 1) 若 $\rho = -1$, BA 亚负定或亚半负定, 则 Lurie 系统 (1) 零解绝对稳定;

2) 若 $\rho = 1$, $BA + \rho k C$ 亚负定, 则 Lurie 系统 (1) 零解在 $[0, k]$ 上稳定.

(其中 $\rho = 1$ 或 -1 , $C = (c_{ij})_{n \times n}$, $c_{ij} = c_i c_j$).
 证明 由 $Bb = \rho c$ 令 $V(x) = \frac{1}{2} X^T B X$, 则

$$\frac{dV(x)}{dt} = X^T B \frac{dX}{dt} = X^T B A X + X^T B b f(\sigma) = X^T B A X + \rho k X^T c f(\sigma). \tag{4}$$

1) 若 $\rho = -1$
 ①当 BA 亚负定时, 式 (4) $\leq X^T B A X < 0$ Lurie 系统 (1) 零解绝对稳定;

②当 BA 亚半负定时, 式 (4) $= X^T B A X - \sigma f(\sigma)$, 由 $\sigma f(\sigma) > 0$ 若 $X^T B A X \leq 0$ 则式 (4) < 0 即得 Lurie 系统 (1) 零解绝对稳定.

2) 若 $\rho = 1$
 式 (4) $\leq X^T B A X + \rho k (\sum_{i=1}^n c_i x_i)^2 = X^T B A X + \rho k (c^T X)^2 = X^T B A X + \rho k (c^T X)(c^T X) = X^T B A X + \rho k X^T c c^T X = X^T (BA + \rho k C) X$,
 则 $BA + \rho k C$ 亚负定, 即得 Lurie 系统 (1) 零解在 $[0, k]$ 上稳定, 证毕.

一般直接控制系统的判定能在 ① 中找到合适的 B 说明系统 (1) 绝对稳定性, 间接控制系统则可通过 ①② 解决, 定理 1 给出了找到一类 $V(x)$ 的具体方法. 2) 多用于分析临界状况或其它更为复杂的 Lurie 控制系统

定理 3 若 $c^T b < 0$ 则一般 Lurie 控制系统 (1) 绝对稳定的充要条件为 BA 亚负定, 其中 $B \in R^{n \times n}$

且 B 正定对称, 满足 $Bb = -c$

证明 必要性. 由引理 1 可知, 系统绝对稳定时有 $c^T A^{-1} b \geq 0$ 由 $Bb = -c$ 得 $b = -B^{-1} c$ 则 $c^T A^{-1} b = -c^T A^{-1} B^{-1} c = -c^T (BA)^{-1} c \geq 0$ 由定理 2 显然有 BA 亚负定;

充分性. 若 BA 亚负定, 由定理 2 及定义 1 知, 系统在 B 正定对称时绝对稳定.

这个定理就说明了, 对于任意给定的一个稳定的 Lurie 控制系统 ($c^T b < 0$), 存在满足条件的 B , 使得 BA 亚负定.

定理 4 考虑文献 [5] 中的飞机纵向飞行系统演变的 n 维 Lurie 控制系统,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho_2 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_n & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & p_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} f(\sigma),$$

$\sigma = c^T x = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) x$, 其中 $\rho_i > 0 \ r > 0$
 $p_2 < 0 \ \sigma f(\sigma) > 0$

若 $p_2 + \sum_{i=1}^n \frac{(\beta_i + \frac{1}{\rho_i})^2}{4} < 0$
 $1 - p_2 > 0$

则文献 [5] 的系统 (2.8) 绝对稳定.

证明 这里有 $c^T b = -1$ 得 $\rho = -1$,

$$\text{记 } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\rho_n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\rho_1} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \frac{1}{\rho_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{1}{\rho_n} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & p_2 \end{pmatrix}, \text{ 得}$$

$$\left| lE - \frac{(BA)^T + BA}{2} \right| = \begin{vmatrix} l+1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2}\left(\beta_1 + \frac{1}{\rho}\right) \\ 0 & l+1 & \dots & 0 & -\frac{1}{2}\left(\beta_2 + \frac{1}{\rho}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l+1 & -\frac{1}{2}\left(\beta_n + \frac{1}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\beta_1 + \frac{1}{\rho}\right) & -\frac{1}{2}\left(\beta_2 + \frac{1}{\rho}\right) & \dots & -\frac{1}{2}\left(\beta_n + \frac{1}{\rho}\right) & l - \rho_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} l+1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2}\left(\beta_1 + \frac{1}{\rho}\right) \\ 0 & l+1 & \dots & 0 & -\frac{1}{2}\left(\beta_2 + \frac{1}{\rho}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l+1 & -\frac{1}{2}\left(\beta_n + \frac{1}{\rho}\right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l - \rho_2 - \frac{1}{l+1} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\rho}\right)}{4} \end{vmatrix} = 0$$

得出 $(l - \rho_2)(l + 1) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\rho}\right)^2}{4} = 0$ 具有负实根条件:

$$\rho_2 + \sum_{i=1}^n \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\rho}\right)^2}{4} < 0$$

$$1 - \rho_2 > 0$$

定理 4 把文献 [4] 推广到 n 维的情况, 得到新的结果, 对角线元素的选取避开了 BA 亚负定判定中复杂的计算, 另外也可以选取不同的 B 来得出更多新的结果.

例 考虑一个文献 [1] 认为用二次型难以解决的问题

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0x_1 + x_2 - f(x_1 - x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -1x_1 + 0x_2 + f(x_1 - x_2) \end{cases}, f \in F_\infty, \quad (5)$$

对于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, 令 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\rho = -1$ 得 $\frac{dV(x)}{dt} = X^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X - \sigma f(\sigma)$. 由 $X^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = 0$ 及由定理 2 的 ② 知 $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ 故式 (5) 绝对稳定.

3 结语

本文沿用 Lyapunov 方法, 重点分析 $B_{n \times n}$ 的存在及选取, 把 Lur'e 系统中的 b, c 和 A 有机地结合起来, 对判定、构造稳定的 Lur'e 系统提供依据. 在解决实际问题中, 对于已知的 b, c 寻找满足稳定的 A , 或者对于确定的 A , 寻找满足稳定的 b, c 或其一, 非常有效. 这种构造方法非常适合 Айзерман 关于 b, c, A 的参数空间集 M 的探讨. 本文在定理提供的方法中, 都采用了较初等的手段, 使得全部分析非常适合计算机程序处理.

参考文献:

- [1] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2000
- [2] Gan Zuoxin, Han Jing-qing. Lyapunov function of general Lur'e systems with multiple nonlinearities [J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16: 119-126
- [3] Xu Bing-ji, Liu Xian-zhi, Liao Xiao-xin. Absolute stability of Lur'e systems with impulsive effects [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2004, 47: 419-425
- [4] 张孟秋, 章联生. 几类 Lur'e 型控制系统绝对稳定性充分必要条件 [J]. 数学理论与应用, 2002, 22(3): 117-120
- [5] 赵洪涌, 滕志东. 一类间接控制系统的绝对稳定性问题 [J]. 应用数学和力学, 2000, 21(7): 732-740
- [6] 屠伯坝. 亚正定理论 (I) [J]. 数学学报, 1990, 33(4): 462-471

A Study of Time-delay Uncertain Water Quality Model BOD-DO

Song Huarbing^{1,2}, Zhang Xin-zhen²

(1. Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China

2. College of Mathematics and Information Sciences, Zaoqing University, Zaoqing 526061, China)

Abstract Research on uncertain water quality model is done to improve the knowledge of the uncertain water condition, and an externally observed variable is always used to analyse the effect of uncertain conditions by regression or filter analysis. A neural network is embedded in to the water quality model to perceive the uncertain conditions of water environment, which will improve the precision of water quality forecast and enrich the uncertain water quality model.

Key words time-delay; model BOD-DO; neural network; genetic algorithms; water quality model

(上接第 46页)

An Approach to Determine Lurie System Stability and Its Application

Lan Dong-sheng, Peng Shi-guo

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract The new criteria of Lurie system stability are obtained by constructing matrix B between b and c of the system and using Lyapunov methods and the theory of metanegative definite matrix. The example is given below. Using the V function which has no integration, it can determine the system stability comprehensively and adjust the data of b, c, A in a stable condition. What is more, it is more suitable for procedures.

Key words general Lurie control system; the first standard; absolute stability; metanegative definite matrix